LES VARIABLES ALÉATOIRES

I) Généralités

1) Définition 1:

Une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire est appelée variable aléatoire.

Définition 2 : Une variable aléatoire X est une application

$$X : \Omega \to R$$

Définition 3 : On appelle une Variable aléatoire toute application dont les valeurs sont issues une expérience aléatoire.

Exemple 1 :

On lance un dé marqué : As, Roi, Dame, Valet, Dix et Neuf.
L'as rapporte 50 €, le roi 6 €, la dame et le valet 5 €, le dix et le neuf ne rapportent rien.

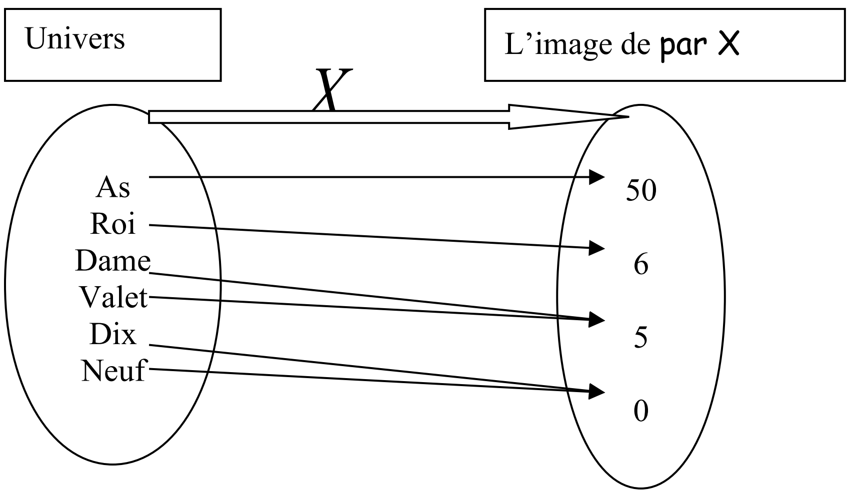
1) Calculer la probabilité de chacun des gains possibles 50 €, 6 €, 5 € et 0 €

Réponse

- L'ensemble du possible est l'univers Ω

$$\Omega = \{As,\ Roi,\ Valet,\ Dame,\ Dix,\ Neuf\}$$

La correspondance qui à toute éventualité de l'univers Ω fait correspondre le montant du gain est une application X appelée Variable aléatoire.



D'où : $$X(\Omega) = \{\ 50,\ 6,\ 5,\ 0\}$$

$$p(X=50) = \frac{1}{6}\ ;\ \ p(X=6) = \frac{1}{6}\ ;\ \ p(X=5) = \frac{2}{6}\ ;\ \ p(X=0) = \frac{2}{6}$$

Schéma représentant le déroulement des calculs

$$\Omega \xrightarrow{X} X(\Omega) \xrightarrow{p} p(X(\Omega))$$

Univers	Image de l'univers par X	Les probabilités

- L'ensemble $X(\Omega)$ constitue un nouvel univers qui a été probabilisé grâce à l'application X.
- L'application p qui à chaque gain élémentaire associe sa probabilité est la loi de probabilité.
- La fonction cumulée qui au réel y associe la probabilité pour que le gain soit inférieur ou égala à y est la fonction de répartition.

Exemple d'application:

Un sac contient 20 jetons, tous de la même forme : 10 rouges, 4 verts, 4 jaunes et 2 noirs.

Un joueur prend au hasard un jeton du sac.

Si le jeton est noir, il gagne 5 € ; s'il est vert ou jaune, il gagne 3 € ; s'il est rouge, il perd 2 €

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat, associe le gain ou la perte du joueur :

1) Donner les valeurs prisent par X (X est associé au gain ou la perte du joueur)

les valeurs prises par X sont:-2, 3 et 5

2) Donner la loi de la variable X (pour chaque valeur de X il donner sa probabilité)

Valeurs de X	k	-2	3	5
La probabilité de la valeurs	P(X=k)	$\frac{10}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{2}{20}$

On a bien $\frac{10}{20}+\frac{8}{20}+\frac{2}{200}=1$

2) Loi de Probabilité et Fonction de Répartition

a) Loi de probabilité :

Soit un Univers Ω fini probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω.

Def : On appelle loi de probabilité de X, l'application qui à chaque valeur x_i fait correspondre la probabilité p_i de la partie ($X = x_i$) de Ω.

On a donc : $p_i = p(X = x_i)$ et $\sum_1^n p_i = p(\Omega) = 1$

Résultats sous forme d'un tableau :

Valeurs x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	....	p_n

Rq : $\sum_i^n p_i = 1$

b) Fonction de répartition :

def : On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X, l'application F (x) de R dans [0 ; 1] qui associe à tout réel x la probabilité : $p(X \leq x)$.

On a donc : F(x) = $p(X \leq x)$; $p(X \geq x)$ = 1 – F(x) ;

$p(x \leq X \leq y)$ = F(y) – F(x) ; F($-\infty$)= 0 et F($+\infty$)= 1.

3) Espérance mathématique d'une V.A. X :

a) Déf : On appelle espérance mathématique d'une V.A. X le nombre $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_1^n p_i \times x_i = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + ... + p_n \times x_n$$

Ce nombre s'interprète comme la moyenne des valeurs x_i

Exemple d'application : Dans une urne on a 3 boules indiscernables au toucher, une rouge, une verte et une bleue. On mise 5 € et on tire une boule de l'urne. Si la boule est bleue, on gagne 10 €. si la boule est rouge on gagne 2 € . si la boule est verte, on gagne 1 €
Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique d'une partie.

1) Donner les valeurs prise par X.
les valeurs prises par X sont : 1 , 2 et 10

2) la Loi de X

k	1	2	10
P(X=k)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

3) Calculer l'espérance mathématique de X

$$E(X)=\sum_{1}^{3} k\times p(X=k) \; = \; 1\times\frac{1}{3} \; + \; 2\times\frac{1}{3} \; + \; 10\times\frac{1}{3} \; = \; =\frac{13}{3}=4,33\,€$$

3) Dire si le jeu est équitable.
La mise est de 5 € et on espère gagner 4,33 € donc le jeu n'est pas équitable

Remarque : Une variable aléatoire est dite centré si son espérance mathématique :

$$E(X-m)=0.$$

b) Propriétés :
Soient a, b deux réels et X une variable aléatoires :

- $E(a)=1\times a=a$
- $E(aX)=aE(X)$
- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $E(X+a)=E(X)+a$
- $E(X-a)=E(X)-a$
- $E(aX-b)=aE(X)-b$

4) Variance et Ecart type :

a) Déf
On appelle variance de la V. A. X l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centré $X-E(X)$. Elle se note $V(X)$.

$$E(X-E(X))^2=\sum_{1}^{n} p_i\times(x_i-m)^2=\sum_{1}^{n} p_i\times x_i{}^2-m^2$$

avec $m=E(X)$.
L'écart Type $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Exemple : On considère le jeu suivant : on lance un dé non pipé et on définit la variable aléatoire X qui prend la valeur de la face supérieure du dé.

1) Donner les valeurs prises par X

2) Calculer l'espérance mathématique de X

3) Calculer la variance et l'écart type de X

Remarque :

- Une variable aléatoire est dite réduite si son Ecart-type est égale à 1

$$\sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(\frac{xi}{\sigma}-m)^2}{n}}=1$$

- Une variable aléatoire est dite centrée et réduite si son espérance mathématique est égale à 0 et son écart type est égal à 1 :

$$E(X-m)=0. \quad \text{Et} \quad \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(\frac{xi}{\sigma}-m)^2}{n}}=1$$

b) Propriétés :

Soient a, b deux réels et X une variable aléatoires :

- $V(a)=0$
- $V(aX)=a^2V(X)$
- $V(aX+b)=a^2V(X)$
- $\sigma(a)=0$
- $\sigma(X+a)=\sigma(X)$
- $V(X+a)=V(X)$
- $V(X-a)=V(X)$
- $V(aX-b)=aV(X)$
- $\sigma(aX+b)=a\sigma(X)$
- $\sigma(X-a)=\sigma(X)$

Exercice 2

Dans une urne, on dispose de trois boules numérotées de 1 à 3. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Partie I:

On tire successivement et **avec remise** 2 boules de l'urne.

1) Donner l'univers Ω et calculer son cardinal.

Ω ={ }

card Ω =

2) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe la somme des deux numéros tirés

a) Donner les valeurs prises par X

b)Donner la loi de X

c) Calculer E(X) et V(X).

Partie II:

On tire successivement et **sans remise** 2 boules de l'urne.

1) Donner l'univers Ω et calculer son cardinal.

Ω ={ }

card Ω =

2) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe la somme des deux numéros tirés

a) Donner les valeurs prises par X

b)Donner la loi de X

c) Calculer E(X) et V(X).

Partie III

On tire **simultanément** 2 boules de l'urne.

1) Donner l'univers Ω et calculer son cardinal.

Ω ={ }

card Ω =

2) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe la somme des deux numéros tirés

a) Donner les valeurs prises par X

b)Donner la loi de X

c) Calculer E(X) et V(X).

II) Variables aléatoires discrètes

1) Loi de probabilité discrète :

Def : On appelle variable aléatoire discrète une variable qui prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs « numérotable » $x_1; x_2; x_3 ...., x_n, ...$.
Ex : le nombre de face dans des parties de pile ou face.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire peut-être donnée, soit par la liste des probabilités, soit par une formule générale permettent de calculer les probabilités ponctuelles. Elle doit satisfaire que la probabilité totale soit égale à 1.

Variable Aléatoire discrète	Variable Aléatoire dénombrable
$\sum_{1}^{n} p_i = 1$	$\sum p_i = 1$

VI) Variables aléatoires continues

1. Définition

Une variable aléatoire continue est une variable aléatoire X dont l'ensemble des valeurs est infini non dénombrable.
Ex : - Durée de vie d'une batterie - Le poids d'un nouveau né.

Il existe une fonction f(x) non négative, définie pour toute valeur x appartenant à R et vérifiant :

- Pour toute partie A de R on a : $p(X \in A) = \int_A f(x)dx$ et $\int_R f(x)dx = 1$.
- Pour tout a appartenant de R on a : $p(X = a) = 0$
- Pour tout a appartenant de R on a : $p(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

- Pour tout a et b appartenant à R on a : $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

f(x) est la densité de probabilité de la variable aléatoire X
On définit la fonction de répartition F(x)=p(X < x)
Donc   p(a < X < b) = F(b) – F(a)

2. Fonction densité de probabilité

Def :
Pour une valeur x de la variable aléatoire X, la densité de probabilité est par définition la dérivée de F(x).

$$f(x) = F'(x)$$

elle indique donc la façon dont la probabilité varie au voisinage de cette valeur.

Rq : Pour qu'une fonction f soit la densité d'une probabilité d'une variable aléatoire X, il faut et il suffit que :

- Quelque soit x, $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. Fonction de répartition

la fonction de répartition est donée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

F(x) vérifie :

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- $F(x)$ est dérivable et continue.
- $F(x)$ est croissante pour tout x appartenant à R.

la fonction F est croissante puisque, si b > a , $F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$ est positive

4. Valeurs caractéristiques

Soit X une variable aléatoire continue alors on a :

Espérance mathématique : $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Variance : $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$

Exercices

Exercice 1

On jette un dé non truqué et on définit la variable aléatoire X qui donne le nombre apparaissant sur la face supérieure.

1) Donner la loi de X

2) Calculer son espérance, sa variance et son écart-type ?

3) Calculer E(2x), E(2x+3), V(2x) et V(2x+3)

Exercice 2

Un joueur dispose d'un dé, trois faces sont blanches, deux sont vertes et une est rouge.
Le joueur lance le dé,

- Si la face est rouge il gagne 10 Euros
- Si la face est verte il gagne 5 Euro
- Si la face est blanche il perd 4 Euro

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce joueur.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

4) Le jeu est-il équitable si la mise est de 10 €

Exercice 3:

Un joueur dispose d'un dé, trois faces sont blanches, deux sont vertes et une est rouge.
Le joueur lance le dé,

- Si la face est rouge il gagne 2Euros
- Si la face est verte il gagne 1Euro
- Si la face est blanche il relance le dé, alors :
- Si la face est rouge il gagne 3Euros
- Si la face est verte il perd 1Euro
- Si la face est blanche le jeu s'arrête sans perte ni gain.

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce joueur.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type.

4) Calculer E(-2X) , E(2x+10), V(2x) et V(2x+10)