CCF De MATHÉMATIQUES

Les parties A, B, C, D et E peuvent être traitées de façon indépendante.

Une machine conditionne des salades et des crudités en barquettes. Le cahier des charges exige une masse de 350 g avec une tolérance de 5 g. En sortie de chaîne de conditionnement, les barquettes peuvent présenter deux types de défauts indépendants: le premier lié à la masse de la barquette et le deuxième lié à l'emballage de la barquette.

Partie A: Un événement et son contraire (3Pts)

On prélève une barquette au hasard dans un stock important, et on note :

M l'événement : « la barquette pèse moins de 295 g »

E l'événement : « la barquette présente un défaut d'emballage ».

On note $\bar{M}$ l'événement contraire de M et $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

On admet que $p(M)=0,002$ et $p(\bar{E})=0,97$.

On admet aussi que les deux événements M et E sont indépendants.

- 1) Expliquer l'événement $\bar{M}$ puis Calculer $p(\bar{M})$
- 2) Expliquer l'événement $E \cap M$ puis Calculer $p(M \cap E)$
- 3) Expliquer l'événement $E \cup \bar{M}$ puis Calculer $p(E \cup \bar{M})$

Partie B: Loi Binomiale (4 Pts)

Une étude statistique permet d'estimer que $\frac{8}{500}$ des barquettes conditionnées par la machine présente un défaut d'emballage. On choisit au hasard 10 barquettes dans le stock qui est important. On considère, pour l'étude, que le choix de 10 barquettes dans le stock peut être assimilé à un prélèvement au hasard et avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de 10 barquettes, associe le nombre de barquettes présentant le défaut d'emballage.

- 1) Justifier que X obéit à une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
- 2) Calculer la probabilité d'avoir plus d'une barquette présentant un défaut d'emballage. Arrondir le résultat au millième.
- 3) Calculer la probabilité d'avoir au moins deux barquettes présentant un défaut d'emballage. Arrondir le résultat au millième.
- 4) Calculer la probabilité d'avoir autant de barquettes avec le défaut d'emballage que de barquettes ne présentant pas le défaut d'emballage.
- 5) Calculer $E(X)$ et $V(X)$
- 6) Calculer $E(2X)$ et $V(2x-3)$

Partie C: Ajustement Linéaire (4 Pts)

L'entreprise souhaite savoir s'il y a un lien entre les deux défauts dans le conditionnement des barquettes, pour cela, le service de qualité de l'entreprise choisit un échantillon de barquettes dans le stock et contrôle l'existence des deux défauts. Le service de qualité a obtenu les résultats suivant, voir tableau ci-dessous

Masse en grammes X	280	285	290	295	300	305
Nombres de barquettes avec le défaut d'emballage Y	17	14	11	7	3	2

- 1) Réaliser un nuage de point (x_i, y_i) . Utiliser l'annexe 1.
- 2) Peut-on utiliser un ajustement linéaire Y en X. Justifier votre réponse.
- 3) En utilisant la calculatrice donner la droite d'ajustement linéaire.
- 4) Donner le coefficient de détermination et faire un commentaire.
- 5) En utilisant la droite d'ajustement, donner le nombre de barquettes présentant le défaut d'emballage si la masse est 299 grammes

Partie D: La loi Normale (5 Pts)

Une barquette est conforme à la vente si sa masse est comprise entre 290 grammes et 310 grammes .

On note Z la variable aléatoire qui associe à chaque barquette sa masse en grammes. On suppose que la variable aléatoire Z obéit à une loi normale de moyenne $\mu=300$ g et d'écart type $\sigma=5$ g .

- 1) Calculer la probabilité qu'une barquette prise au hasard dans le stock, soit conforme à la vente. Donner le résultat 0,0001 près.
- 2) Calculer $p(Z \geq 310)$
- 3) Déterminer le réel h pour que $p(Z < h) = 99\%$
- 4) Déterminer le réel a pour que $p(a \leq Z \leq b) = 99\%$ tel que $a - \mu = b - \mu$

Partie E : Échantillonnage et Estimation (4 Pts)

Une entreprise commande un nombre important de barquettes. Lors de la livraison, le service qualité de cette entreprise cherche à estimer la masse moyenne inconnue μ , exprimée en grammes, des barquettes livrées. Le service de qualité choisit un échantillon, au hasard, de 50 barquettes et pèse leurs masses. On considère que cet échantillon peut être assimilé à un prélèvement au hasard et avec remise de cinquante barquettes dans la livraison. On admet que la masse de chaque barquette est associée à

la variable aléatoire X qui obéit à une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ . Les résultats des mesures effectuées sont donnés dans le tableau ci-dessous

Masse en grammes	[290 ; 295 [	[295 ; 300 [	[300 ; 305 [	[305 ; 310 [	[310 ; 315 [
Nombres de Barquettes	2	11	30	6	1

- 1) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart type. On arrondira l'écart type au centième.
- 2) On note $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 barquettes choisies au hasard dans la livraison, associe la moyenne des masses de ces 50 barquettes, exprimées en grammes.
 - a) Préciser la loi de la variable aléatoire $\bar{X}$ et donner ses paramètres.
 - b) Déterminer le réel a pour que $p(\mu - a \leq \bar{X} \leq \mu + a) = 0,95$. Donner une valeur approchée au millième par excès de a .
- 3) Dans cette question on suppose que l'écart type σ de toute la production est connu et vaut $\sigma = 5g$. Donner un intervalle de confiance de la masse moyenne des barquettes reçues par l'entreprise au seuil de confiance de 95 %.
- 4) Dans cette question on suppose que l'écart type de toute la production est inconnu mais estimé par $s = 3,78g$. Donner un intervalle de confiance de la capacité moyenne des barquettes reçues par l'entreprise au seuil de confiance de 95 %.
- 5) Dans cette question on suppose que l'écart type de toute la production est connu et vaut $\sigma = 5g$. Déterminer la taille de l'échantillon pour que l'étendue de l'intervalle de confiance, au seuil de 95%, ne dépasse pas 1,5.
- 6) Dans cette question on suppose que l'écart-type toute la production est connue $\sigma = 5g$. A partir d'un échantillon de taille $n = 100$, on a une estimation la moyenne par $\bar{x} = 300,1g$
 - a) Au risque de $\alpha = 5\%$ quel intervalle de confiance on peut choisir pour estimer la moyenne de toute la production ?

$$I = [300,1 - 1,96 \times 0,5 ; 300,1 + 1,96 \times 0,5]$$

$$J = [300 - 1,96 \times 0,5 ; 300 + 1,96 \times 0,5]$$

$$K = [300,1 - 2,58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} ; 300,1 + 2,58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}]$$
 - b) Si l'entreprise qui conditionne les barquettes confirme que la masse moyenne de toutes les barquettes est $\mu = 300g$. L'entreprise qui a commandée les barquettes doit-elle garder ces barquettes ? Justifier votre réponse.