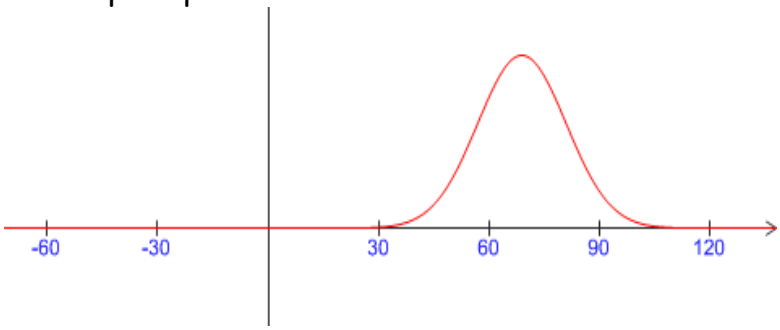
La loi normale

1) Loi normale

Définition :

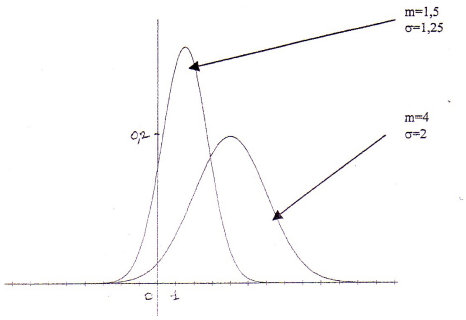
Soient deux nombres réels m et σ (σ>0), on appelle courbe de Gauss la représentation graphique de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$.

Exemple : En prenant pour paramètres m = 69 et σ=12 on obtient la courbe suivante :



Autres exemple :

Avec m = 1,5 et $\sigma=1{,}25$ puis avec m = 4 et σ=2 on obtient les courbes ci-dessous.



Propriété :

On admet que la courbe de Gauss a pour axe de symétrie la droite d'équation x = m et que l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.

Définition :

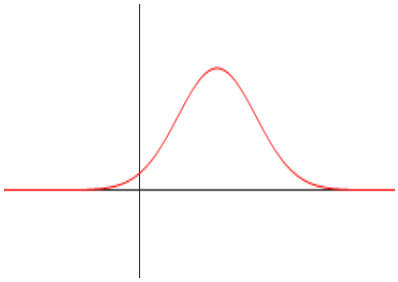
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est appelée loi normale de paramètres m et σ si pour tout a et b, la probabilité de l'événement « $a<X<b$ » est égale à l'aire du domaine limité par la courbe de Gauss (de paramètres m et σ), l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = a et x = b.

Cette loi de probabilité est notée ..... L'espérance de cette variable aléatoire est m et son écart-type est σ.

Exemple :

i) Placer la moyenne m, sur le graphique

ii) Colorier l'aire qui représente p(a < X < b) sachant que m > a et m < b



2) Cas particulier : loi normale centrée réduite

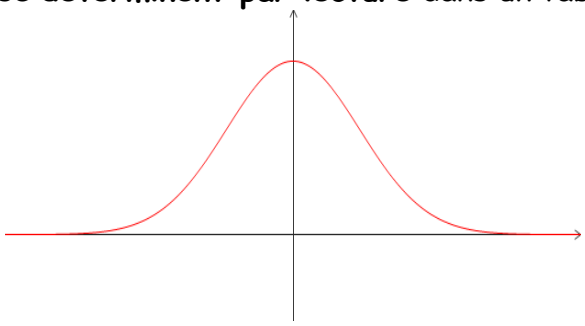
Définition :

On appelle loi normale centrée réduite, la loi normale de paramètres m = 0 et σ =1.

Remarque :

On note U la variable aléatoire associée.

Les probabilités **p(U<u)** se **déterminent par lecture** dans un tableau (formulaire)

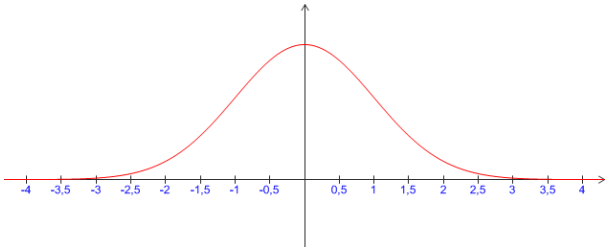


Exemples :

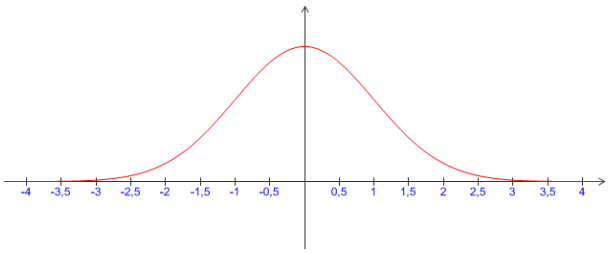
1°) En utilisant le tableau de la loi normale, compléter :

$p(U < 1{,}65) =$ $\qquad$ $p(U < 2{,}88) =$ $\qquad$ $p(U < .....) = 0{,}9875$

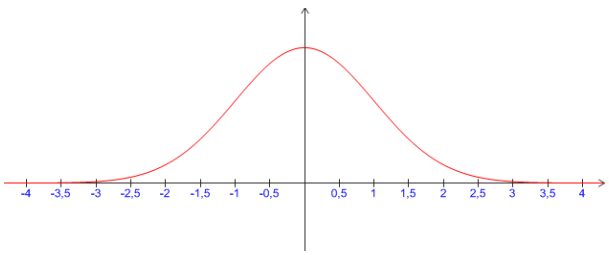
2°) En utilisant le tableau de la loi normale et un raisonnement sur les aires, déterminer :



Hachurer l'aire puis calculer
$P(0{,}6 < U < 1{,}42) =$



Hachurer puis calculer
$P(0 < U < 1{,}9) =$



Hachurer puis calculer
$P(U < -1{,}8) =$

3) Cas général

Théorème :Soit X une variable aléatoire de loi normale N(m ; σ), alors la variable aléatoire U définie par $U = \dfrac{X - m}{\sigma}$ admet comme loi de probabilité la loi normale centrée réduite N(0 ; 1).

Exercice 1 :

Soit U une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la Loi Normale (loi de Laplace-Gauss) N (0 ; 1), c'est-à-dire de moyenne $m=0$ et d'écart-type $\sigma=1$.

1) Déterminer la probabilité pour que U soit inférieure à 2. On note cette probabilité $P(U<2)$.

2) Déterminer la probabilité pour que U soit supérieure à 1,56. On note cette probabilité $P(U>1{,}56)$.

3) Déterminer la probabilité pour que U soit comprise entre - 2,78 et 0,89. On note cette probabilité : $P(-2{,}78<U<0{,}89)$.

Exercice 2 :

On admet que la taille, exprimée en cm, des enfants de sept ans suit la Loi Normale de moyenne 120 cm et d'écart-type 6 cm. En utilisant une table de la Loi Normale ou la calculatrice

1) Déterminer la probabilité pour qu'un enfant de sept ans ait une taille inférieure à 123 cm.

2) Déterminer la probabilité pour qu'un enfant de sept ans ait une taille comprise entre 116 cm et 124 cm.

Exercice 3 :

On considère une production végétale dont le caractère "masse" est une variable aléatoire, notée X, dont la loi de probabilité est la loi normale (Laplace-Gauss) de moyenne 220 grammes et d'écart-type 25 grammes. On prélève un élément au hasard.

1) Calculer la probabilité pour que la masse de cet élément soit inférieure à 250 grammes.

2) Calculer la probabilité pour que la masse de cet élément soit supérieure à 200 grammes.

3) Calculer la probabilité pour que la masse de cet élément soit comprise entre 180 et 280 grammes.

Exercice 4 :

On admet que la masse, exprimée en kg, des vaches de la race SALERS est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi normale de moyenne 650 kg et d'écart-type 50 kg. En utilisant une table de loi normale ou la calcultrice :

1) Déterminer la probabilité pour qu'une vache de la race SALERS pèse plus de 610 kg.

2) Déterminer la probabilité pour qu'une vache de la race SALERS ait une masse comprise entre 600 kg et 700 kg.

3) Déterminer la masse a en kg pour que $p(X > a)=0,2984$

Exercice 5

Une machine conditionne des sachets de thé en boites. On admet que la masse des boites, exprimée en grammes, est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 1.

1) Déterminer la probabilité pour que la masse d'une boite dépasse 52 grammes.

2) On accepte de ne commercialiser que les boites dont la masse est comprise entre 48,5 et 51,5 grammes.

a) Calculer la probabilité pour qu'une boite prise au hasard soit commercialisée.

b) Estimer le nombre de boites pouvant être commercialisées sur une production de 100 000 boites.

Exercice 6 :

Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine met un médicament en sachets. Les masses des sachets se répartissent suivant la loi normale de moyenne m = 250 mg et d'écart-type s = 6 mg.

On pourra utiliser une table de la loi normale centrée réduite ou la calculatrice pour répondre aux questions suivantes :

1) Quelle est la probabilité pour que la masse d'un sachet soit comprise entre 244 mg et 255 mg ?

2) Combien, sur un lot de 1000 sachets, y aura-t-il approximativement de sachets dont la masse est inférieure à 242 mg ?

Exercice 7 :

Une entreprise agro-alimentaire utilise une machine pour conditionner des framboises en barquettes. La masse théorique d'une barquette est 200 g. Afin de vérifier l'étalonnage de la machine, on prélève un échantillon de 500 barquettes que l'on pèse. On obtient les résultats suivants :

Masse (g)	[190 ; 195 [	[195 ; 200 [	[200 ; 205 [	[205 ; 210 [
Nombre de barquettes	75	125	200	100

1) Calculer la masse moyenne, la variance et l'écart-type de cet échantillon de barquettes. On donnera le détail des calculs. L'écart-type sera donné à 0,1 près.

2) a) Quel est, dans cet échantillon, la proportion de barquettes ayant une masse supérieure ou égale à 200 g ?

b) Quel est, dans toute la production, la proportion de barquettes ayant une masse supérieure ou égale à 200 g

3) L'épreuve consiste à prélever au hasard une barquette dans la production. On admet que la probabilité pour que cette barquette ait une masse supérieure ou égale à 200 g est p = 0,6. On répète 5 fois cette épreuve, avec remise et de manière indépendante, et on note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de barquettes parmi ces 5 dont la masse est supérieure ou égale à 200 g.
a) Justifier que la loi de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Les résultats suivants seront exprimés à 0,01 près.
4) Calculer la probabilité pour que les 5 barquettes aient une masse supérieure ou égale à 200 g.

5) Calculer la probabilité pour qu'au moins une barquette ait une masse supérieure ou égale à 200 g.