Classe BTS GPN

Analyse combinatoire

On utilise l'analyse combinatoire pour dénombrer (compter les objets) un ensemble dont les éléments vérifient une propriété donnée.

1) Énoncé du principe de multiplication : Si une opération se décompose en k étapes successives (ordre), la première étape peut se décomposer en n_1 , la deuxième en n_2 , etc. Le nombre de façon de réaliser l'opération est :

$$N=\prod_{i=1}^{i=k} n_i=n_1\times n_2\times .....\times n_k$$

Exemple 1: On lance une pièce 3 fois . Combien peut-on obtenir de résultats différents? Et donner toutes les combinaisons possibles

Réponse :

Exemple 2 :

Un restaurant affiche le menu suivant:

POTAGE	ENTRÉE	PLAT PRINCIPAL	DESSERT
Tomate *Légume*	*Crevette* *Salade*	*Canard* *Bœuf* *Truite*	*Gâteau* *Fruit*

Combien existe-t-il de choix différents de repas complets?

Réponse :

2) Énoncé du principe d'addition : *Soit une opération qui peut se réaliser de N façons. Si ces N façons peuvent se séparer en k catégories disjointes deux à deux tel que les catégories peuvent se réaliser de n_1 façons, n_2 façons, etc. Alors :*

$$N=n_1+n_2+...+n_k=\sum_{i=1}^{i=k} n_i$$

Exemples : Combien de montants d'argent peut-on faire avec quatre pièces de 1 centime, de 5 centimes, de 10 centimes et de 20 centimes si l'on ne peut utiliser plus de deux des quatre pièces ?

Réponse :

3) Formule 2^n

On place l'un des deux nombres 0 ou 1 dans n cases

0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	.... n cases	0 ou 1

Pour chaque case on a 2 possibilités donc pour les n cases on a : 2^n

- Application : Nombre de parties d'un ensemble

Tout ensemble de n éléments possède 2^n parties

Ex : Soit $E = \{ a, b, c, d, e \}$ Donner le nombre de parties de E et les former .

Rep :

4) Permutations

Sans répétition :

Définition :Une permutation de *n* objets est un rangement de ces *n* objets. Le nombre de permutations de *n* objets est le **nombre de façons de ranger ces objets** les uns par rapport aux autres ; ce nombre est ***n*!** (factorielle *n*).

Si on range n objets dans n cases, le nombre de dispositions est :

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) ..... \times 1 = n!$$

Exemples:

1) Le nombre de ranger 4 stylos

2) Déterminer de combien de façons différentes on peut agencer (ordonner) les objets distincts A, B et C.et donner les agencements possibles

3) Combien de nombres à cinq chiffres peut-on former avec les chiffres 4, 5, 6 , 7 et 8

5) Arrangement

Définition :
Le nombre d'arrangements possibles (permutations) de p éléments choisis parmi n éléments (n objets pris p à p) lorsque **l'ordre intervient** et qu'il n'y a pas de répétition permise vaut pour ($n \leq p$):

$$A_n^p = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{p})!}.$$

Exemples :

1) Le nombre de façon de disposer sur un rayonnage 3 livres parmi 10.

Rep :

2) Si un objet comporte 3 parties colorées, le nombre de choix possible de couleurs distincts parmi 7

Rep :

3) Le nombre possible de tiercé (dans l'ordre) pour une course de 12 chevaux.

Rep :

4) Avec les chiffres 1, 2 , 3 et 4 , combien de nombres à 3 chiffres peut-on former ?

5) Combinaison

Définition:

Le nombre de façons de choisir p éléments parmi n éléments est défini comme suit : $\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n\text{-}p)!\times p!}$

Étant donné n objets formant un ensemble E, on appelle combinaison de p éléments pris parmi n ($n\leq p$), toute partie de E à p éléments.

Propriétés du nombre $\binom{n}{p}$:

1) $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$, 2) $\binom{n}{0}=1$, 3) $\binom{n}{n}=1$, 4) $\binom{n}{n-1}=n$

5) $\binom{n}{1}=n$, 6) $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$ (Propriété du triangle de Pascal).

7) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n$ (Propriété du triangle de Pascal).

Exemples

1) Combien existe-t-il de mains différentes de 5 cartes au poker?

Rep :

2) Avec les 5 couleurs suivantes: ROUGE, JAUNE, BLEU, VERT et NOIR

Combien peut-on former de drapeaux différents contenant 3 des couleurs ?

Rep :

3)Nous avons à former un comité de 3 personnes choisies parmi 8 candidats possibles.

a) Combien de comités différents peut-on former ?
b) Si le comité possède 1 président, 1 vice-président et 1 secrétaire
alors combien de comités peut-on former?

Rep

Exercice 0:

Dans un jeu de 32 cartes

1) On tire au hasard une carte. Combien y-t-il de possibilités ?

2) On tire deux cartes l'une après l'autre sans remise. Combien y-t-il de possibilités ?

3) On tire deux cartes l'une après l'autre avec remise. Combien y-t-il de possibilités ?

4) On tire deux cartes simultanément. Combien y-t-il de possibilités?

5) On tire cinq carte simultanément

a) Combien y-a-t-il de mains à cinq cartes contenant 2 Rois ?

b) Combien y-a-t-il de mains à cinq cartes contenant 2 As ?

c) Combien y-a-t-il de mains à cinq cartes contenant 4 As?

d) Combien y-a-t-il de mains à cinq cartes contenant 4 Rois ?

e) Combien y-a-t-il de mains à cinq cartes contenant 2 Rois et 2 As ?

Exercice 1 :

Dans une classe de 16 élèves, combien y-t-il de classements possibles ?

Exercice 2 :

Combien existe-t-il de nombres différents de cinq chiffres distincts parmi 1, 2, 3, 4, 5 ?

Exercice 3 :

Dans une urne, on a 5 boules rouges et 5 boules bleues, on en prend 4 simultanément.
Combien y-t-il de possibilités ?

Exercice 4 :

Une classe comporte 13 filles et 8 garçons. Pour former une comité, elle élit 4 délégués de classe.

a) Combien y a-t-il de possibilités ?

b) Combien y a-t-il de possibilités comprenant exactement une fille ?

c) Combien y a-t-il de possibilités comprenant exactement deux filles ?

d) Combien y a-t-il de possibilités au plus 2 filles?

Exercice 5 :

Dans une course de 20 chevaux .Combien y a-t-il d'arrivées possibles au :

a) tiercé

b) quarté

c) quinté