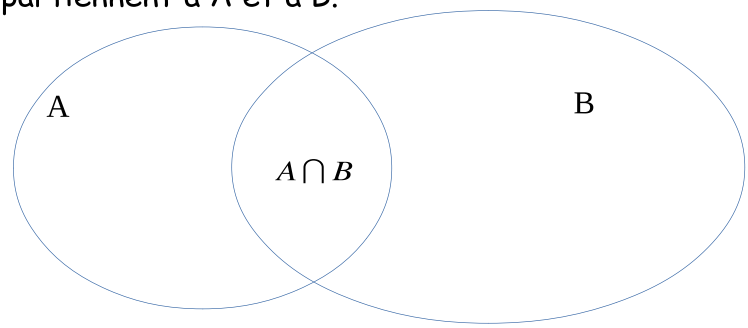
Classe BTS **GPN**

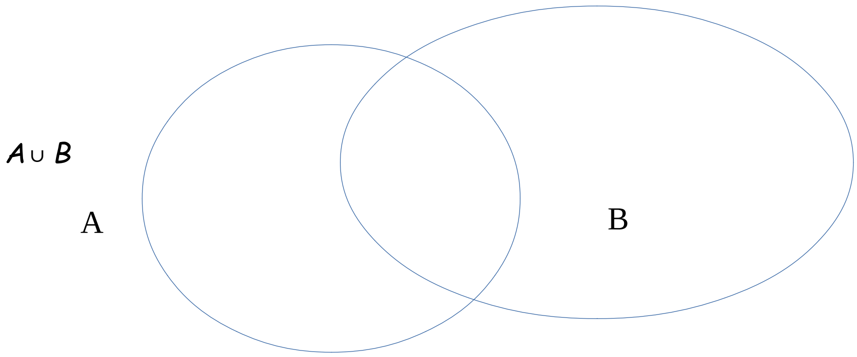
Calcul de probabilité

1) Langage des ensembles :

Un ensemble est dit fini si le nombre des objets (des éléments) qui le forme est un entier naturel.
Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre des objets (d'éléments) qui le compose, notation Card.
L'intersection de deux ensemble A et B (Notation $A \cap B$) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.



L'union de deux ensembles A et B (Notation) $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B



2) Langage des événements :

L'univers est un ensemble fini Ω d'éventualités ou de possibles sur lequel on envisage définir une probabilité.
L'univers Ω est un ensemble d'éventualités ou de possibles.
Événement : est une partie de l'univers Ω donc un ensemble d'éventualités.
Événement élémentaire : événement ne comportant qu'une seule éventualité.
Événement certain : Ensemble Ω de toutes les éventualités.
Événement impossible : ensemble vide ϕ ne comporte aucune éventualité.
Événements incompatibles : deux partie A et B de Ω tels que : $A \cap B = \phi$
Événement A et B: (conjonction) :Intersection de deux événements A et B : $A \cap B$.
Événement A ou B :(disjonction) :Union de deux événements A ou B : . $A \cup B$
Événement contraire $\overline{A}$ événement contraire de A dans Ω .

3) Probabilité sur un ensemble fini.

a) Définition

Soit Ω un ensemble fini de cardinal n . $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ $Card(\Omega) = n$

Une probabilité sur Ω est défini par la donnée des nombres réels : $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tel que :

Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $0 \leq p_i \leq 1$, et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ et, pour tout i , p_i est la probabilité de $\{w_i\}$

Pour tout événement $A \neq \phi$, la probabilité $p(A)$ est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires distincts inclus dans A .

$p(A)$ est compris entre 0 et 1. ($0 \leq p(A) \leq 1$)

$p(\phi) = 0$ et $p(\Omega) = 1$

b) Probabilité uniforme (équiprobabilité):

L'univers Ω de cardinal n, est muni de la probabilité uniforme si les n événements élémentaires ont tous la même probabilité qui est égale à $\frac{1}{n}$.

Remarque : Tout événement A étant la somme (disjonction) de p événements élémentaires ($p \leq n$) sa probabilité est égale à $\frac{p}{n}$.

Définition : la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

Exemples:

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

a) Quelle est la probabilité de tirer un as ?

b) Quelle est la probabilité de tirer un roi ?

c) Quelle est la probabilité de tirer un as ou un roi ?

d) Quelle est la probabilité de tirer un as un roi ou un cœur ?

2) Vous appartenez à un groupe de 6 personnes, on choisi au hasard deux personnes dans ce groupe. Quelle est la probabilité pour que vous faites partie des deux personnes choisies?

4) Règle de calcul:

Événement incompatible : $A \cap B = \phi$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Événement Contraire :

$$\boxed{p(A) + p(\overline{A}) = 1} \text{ d'où } \boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

Événements indépendants : Deux événements sont indépendants si, et seulement si :

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$$

Probabilité Totale : pour tout couple événements A et B

$$\boxed{p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$$

Probabilité de A ou B

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Exemple :

On tire deux cartes d'un jeu de 32, quelle est la probabilité de tirer deux piques ou deux têtes ? (les têtes sont : le roi, la dame et la valet).

Exercice 1 :

Dans une urne, il y a 5 boules blanches et 5 boules Noires indiscernables au toucher. On prend 4 boules simultanément.

1) Donner l'univers et calculer son cardinal.
2) Calculer la probabilité d'avoir 4 boules blanches.
3) Calculer la probabilité d'avoir 2 boules blanches.
4) Calculer la probabilité d'avoir au moins une boule blanche.
5) Calculer la probabilité d'avoir au plus 2 boules noires

Exercice 2 :

Dans un jeu de 32 cartes, on prend une main de cinq cartes au hasard.

a) Calculer la probabilité d'avoir 2 as dans une main.
b) Calculer la probabilité d'avoir 4 as dans une main.
c) Calculer la probabilité d'avoir 2 cartes d'une couleur et 3 cartes d'une autre couleur.
d) Calculer la probabilité d'avoir 2 rois et 2 dames
e) Calculer la probabilité d'avoir au moins un as
f) Calculer la probabilité d'avoir un roi et un as
g) Calculer la probabilité d'avoir 4 cartes de même couleur.
h) Calculer la probabilité d'avoir un roi ou un as

Exercice 3 :

Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marrons, et 18 filles dont la moitié a également les yeux marrons. Calculer la probabilité pour qu'un élève choisi au hasard :

a) Soit un garçon.
b) ait les yeux marron.
c) Soit une fille ou ait les yeux marron.

Exercice 4 :

Une urne contient 10 boules blanches, 5 boules noires et 5 boules rouges. On tire 3 boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) La première boule blanche et les deux autres rouges ?
b) Les deux premières boules noires ?
c) Au moins une boules blanches ?
d) Trois boules de même couleur ?
e) Trois boules de couleurs différentes.
f) La première et la troisième boules tirées sont rouges.
g) La deuxième boule tirée est blanches.

Exercice 5:

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 20. On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité des événements :

a) A: « on tire une boule de numéro impair ».
b) B: « on tire une boule de numéro multiple de 3 moins un ».
c) C: « on tire une boule de numéro inférieur à 10»
d) D: « on tire une boule de numéro impair et inférieur à 10»
e) E: « On tire une boule de numéro multiple de trois moins un et impair »